«پژوهشگر گرامی»

صفحاتی را که مشاهده می فرمائید، گزیده ای محدود از یک سند پژوهشی طولانی است که شامل :

- صفحه روی جلد
- چکیده فارسی و انگلیسی
- صفحه اول مقدمه
- منابع
- فهرست مطالب
- پیشنهادات

برای مشاهده فرمت دیجیتالی پایان نامه ها / رساله ها می توانید به آدرس ذیل مراجعه کنید:

http://lib.uok.ac.ir:8080

در صورت به وجود آمدن هرگونه مشکل و پرسش در زمینه دسترسی، تهیه و استفاده از منابع الکترونیکی و دیجیتال به بخش پایان نامه ها و منابع دیجیتال کتابخانه مرکزی و مرکز اسناد مراجعه نموده و تماس بگیرید!

شماره تماس ۳۳۶۲۴۰۰۶-۰۸۷

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

روش‌های عددی برای حل معادلات عمومی کلاین-گوردون با شرایط مرزی دیریکله و غیرمحلی

پژوهشگر:

رؤیا اژدری

استاد راهنما:

دکتر امجد علی‌پناه

خرداد ۱۴۰۲

۱۰۰۰=

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کردستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

روش‌های عددی برای حل معادلات عمومی کلاین-گوردون با شرایط مرزی دیریکله و غیرمحلی

پژوهشگر:

رؤیا اژدری

استاد راهنما:

دکتر امجد علی‌پناه

خرداد ۱۴۰۲

دانشگاه کردستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

روش‌های عددی برای حل معادلات عمومی کلاین-گوردون با شرایط مرزی دیریکله و غیرمحلی

پژوهشگر:

رؤیا اژدری

در تاریخ ۱۴۰۲/۰۳/۳۱ توسط کمیته تخصصی و هیات داوران زیر مورد بررسی قرار گرفت و با درجه خیلی خوب به تصویب رسید.

هیات داوران	نام و نام‌خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱. استاد راهنما	دکتر امجد علی‌پناه	دانشیار	
۳. استاد داور داخلی	دکتر شاهرخ اسماعیلی	دانشیار	
۴. استاد داور داخلی	دکتر کمال شانظری	دانشیار	

مهر و امضاء مدیر گروه
دکتر امجد علی‌پناه

معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده
دکتر صابر ناصری

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

چکیده

در این پایان‌نامه به حل عددی معادلات کلی غیرخطی کلاین-گوردون می‌پردازیم. طرح‌های تفاضلات متناهی صریح و ضمنی مرتبه چهارم و ششم را معرفی کرده و سپس پایداری و سازگاری روش‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

روش‌های مرتبه بالاتر ارائه شده در این پایان‌نامه امکان کاهش تعداد گره‌ها را فراهم می‌کنند که ممکن است هنگام حل KGEهای چند بعدی نیز بسیار جالب باشند. پایداری و سازگاری طرح‌های پیشنهادی را هنگام اعمال همواری معینی روی توابع استفاده شده مورد مطالعه قرار می‌دهیم. علاوه بر این شرایط دیریکله معمولی و بعضی از شرایط مرزی انتگرال غیرمحلی را نیز روی مرزها اعمال می‌کنیم. و در پایان به ارائه مثال‌های عددی با اعمال همه شرایط معرفی شده می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: معادله‌های کلاین-گوردون، سازگاری، پایداری، شرایط مرزی غیرمحلی، روش‌های تفاضل متناهی.

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست تصاویر

فهرست علائم اختصاری

مقدمه

حل عددی معادلات با مشتقات جزئی با شرایط انتگرال، همچنان یک قسمت عهده از تحقیقات با کاربردهای وسیع در فیزیک نوین و تکنولوژی را در ۲۰ سال اخیر به خود اختصاص داده است [۱۶].

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی با مسائل مقدار مرزی هذلولوی غیرکلاسیک با شرایط غیر محلی مدل‌سازی شده‌اند که بجای معلومات کلاسیک داده‌های مرزی، یک شرط مرزی غیر محلی را تحمیل می‌کنیم. این شرط غیر محلی هنگامی که داده‌های مرزی را نمی‌توان به طور مستقیم اندازه‌گیری کرد، به وجود می‌آیند [۹].

اگرچه بیشتر مقالات روی معادلات با مشتقات جزئی مرتبه دوم خصوصاً انتقال گرما بوده است ولی ما در اینجا یک عضو از خانواده معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا PDEها به نام معادله کلاین-گوردون [۱] (KGE) را مورد مطاله قرار داده‌ایم. KGEها یک خانواده از PDEها هستند که هنگام حل مسائل مکانیک نسبیتی کوانتوم و نظریه میدان به وجود می‌آیند. این مسائل بسیاری از پدیده‌های مهندسی محیط زیست و پزشکی ، ... را مدل سازی می‌کنند [۱۰].

معادله کلاین-گوردون، حالت نسبیتی معادله شرودینگر است گه برای توجیه ذرات کوانتومی

1. Equation Gordon Klein

با چرخش صفر به کار می‌رود. این معادله به افتخار دو فیزیکدان به نام‌های اسکار کلاین [1] و والتر گوردون [2] نامگذاری شده‌اند [۱۵].

در این پایان‌نامه، روش‌هایی عددی مرتبه‌های بالا بر پایه تفاضلات متناهی برای حل معادله‌ی هذلولوی یا اصطلاحاً معادله‌ی موج یک‌بعدی و غیرخطی کلاین-گوردون را به همراه شرایط اولیه‌ی غیرمحلی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q\left(x,t,u\right), \qquad (x,t) \in [0,L] \times [0,T]. \tag{1}$$

که $q\left(x,t,u\right)$ تابعی به اندازه کافی مشتق‌پذیر است و $T \in \mathbb{R}^+$. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم که $L = 1$ و $T = 1$.

شرایط اولیه دیریکله به‌صورت:

$$u\left(x,0\right) = f\left(x\right), \quad 0 \leq x \leq L, \tag{2}$$

$$u_t\left(x,0\right) = \bar{f}\left(x\right), \quad 0 \leq x \leq L, \tag{3}$$

و شرایط مرزی انتگرال غیرمحلی نیز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$u\left(0,t\right) = \int_0^L \phi\left(x,t\right) u\left(x,t\right) dx + g_1\left(t\right), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$u\left(1,t\right) = \int_0^L \psi\left(x,t\right) u\left(x,t\right) dx + g_2\left(t\right), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

1. Klein Oscar
2. Gordon Walter

توابع f، $\bar{f}$، g_1، g_2، ψ و ϕ را توابعی معلوم در نظر می‌گیریم.

.

در این پایان‌نامه، روش‌های تفاضل متناهی مرتبه چهار و شش به صورت صریح و ضمنی برای معادله‌ی (۱.۳) با شرایط داده شده، ارائه می‌شوند. همچنین پایداری و سازگاری روش را با محاسبه نرم-۲ خطا برای ۲ مثال بررسی می‌کنیم.

فصل اول

مقدمه و پیش‌نیازها

در این فصل، برخی از تعاریف و مفاهیم مقدماتی و گزاره‌های مورد استفاده در فصل‌های بعد آورده می‌شود. ابتدا فضاهای تابعی و سپس تعاریف و نامساوی‌های مهم و مورد نیاز معرفی می‌شوند. مطالب این بخش برگرفته از مراجع [۱، ۲] است.

۱.۱ فضای برداری

تعریف ۱.۱.۱ (فضای برداری). یک فضای برداری (فضای خطی) متشکل است از:

۱. میدان F از اسکالرها

۲. مجموعه V از بردارها

۳. یک عمل جمع برداری که به هر جفت از بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ از V بردار $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ از V را که مجموع $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ نامیده می‌شود، وابسته می‌سازد با این شرایط که:

الف. جمع خاصیت جابه‌جایی دارد: $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$.

ب. جمع خاصیت شرکت‌پذیری دارد: $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$.

ج. بردار یکتای $\mathbf{o}$ با نام بردار صفر در V وجود دارد که به ازای هر $\mathbf{x}$ در V:

$\mathbf{x} + 0 = \mathbf{x}$.

د. به ازای هر بردار $\mathbf{x}$ در V، بردار یکتای $\mathbf{x}-$ در V وجود دارد که $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$.

۴. یک عمل ضرب اسکالر که به هر اسکالر c از F و هر بردار $\mathbf{x}$ از V بردار $c\mathbf{x}$ در V که حاصل‌ضرب c و $\mathbf{x}$ نامیده می شود را وابسته می‌سازد که:

الف. به ازای هر $\mathbf{x}$ در V: $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

ب. $(c_1 c_2)\mathbf{x} = c_1 (c_2 \mathbf{x})$

ج. $c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$

د. $(c_1 + c_2)\mathbf{x} = c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{x}$

مثال ۱.۱.۱. فضای nتایی F^n. فرض کنیم F میدانی دلخواه و $\mathbf{V}$ مجموعه همه nتایی‌های $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ از اسکالرهای x_i در F باشد. با فرض $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ و y_i در F، مجموع α و β با

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \tag{1.1}$$

و ضرب اسکالر c و بردار α با

$$c\alpha = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \tag{2.1}$$

تعریف می‌شود. بررسی این حکم که جمع برداری و ضرب اسکالری اخیر در شرایط (۳) و (۴) صدق می‌کنند با استفاده از خواص مشابه جمع و ضرب عناصر F آسان است.

مثال ۲.۱.۱. فضای ماتریسهای $m \times n$، $F^{m\times n}$. گیریم F میدان دلخواه و m و n

اعدادی صحیح و مثبت باشند. فرض کنیم $F^{m\times n}$ مجموعه همه ماتریسهای $m\times n$ بر روی میدان F باشد. مجموع دو بردار A و B از $F^{m\times n}$ با

$$(A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij} \tag{۳.۱}$$

و حاصل ضرب اسکالر c و ماتریس A با

$$(cA)_{ij}=cA_{ij} \tag{۴.۱}$$

تعریف می‌شود. توجه کنید $F^{1\times n}=F^n$.

۱.۱.۱ فضای نرم‌دار

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X فضای برداری روی میدان F از اعداد حقیقی یا مختلط باشد. تابع $\|.\|:X\mapsto \mathbb{R}^+\cup\{0\}$ یک نرم روی X است، هرگاه برای هر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در X و α در F داشته باشیم [۲]

الف. $\|\mathbf{x}\|\geq 0$ و $\|\mathbf{x}\|=0\Leftrightarrow \mathbf{x}=0$

ب. $\|\alpha\mathbf{x}\|=|\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$.

ج. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$.

تابع حقیقی مقدار روی X که در شرایط الف، ب و ج صدق کند، یک نیم نرم روی X نامیده می‌شود.

توجه: معمولاً در ریاضیات کاربردی میدان F، میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یا مختلط $\mathbb{C}$ در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. فضای برداری X همراه با یک نرم روی آن، فضای خطی نرم‌دار نامیده

می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. فضای برداری حقیقی نرم‌دار X فضای باناخ[1] نامیده می‌شود هرگاه کامل باشد، یعنی هر دنباله کوشی $(\mathbf{x}_n)$ در X، به عضوی از X مانند $\mathbf{x}$ همگرا باشد.

تعریف ۵.۱.۱. دو نرم $\|.\|_a$ و $\|.\|_b$ روی یک فضای برداری حقیقی X هم‌ارز نامیده می‌شود، اگر وتنها اگر ثابت‌های مثبت $c_۱, c_۲ \in \mathbb{R}$ که $۰ < c_۱ \leq c_۲$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $\mathbf{x} \in X$ داشته باشیم:

$$c_۱ \parallel \mathbf{x}\|_a \leq \parallel \mathbf{x}\|_b \leq c_۲ \parallel \mathbf{x}\|_a.$$

لم ۱.۱.۱. اگر $\mathbf{V}$ یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، در این صورت هر دو نرم دلخواه که روی $\mathbf{V}$ تعریف می‌شوند، معادل می‌باشند.

۲.۱.۱ فضای حاصل‌ضرب داخلی

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید X فضای برداری حقیقی باشد. تابع $(.,.) : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ یک حاصل‌ضرب داخلی روی X است، هرگاه:

الف. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \quad , (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

ب. برای هر $\mathbf{y} \in X$ نگاشت $\forall \mathbf{x} \in X \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ خطی باشد.

ج. برای هر $\mathbf{x} \in X$، $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq ۰$ و $\mathbf{x} = ۰ \Leftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = ۰$.

فضای برداری X همراه با حاصل‌ضرب داخلی بالا را یک فضای حاصل‌ضرب داخلی می‌نامند.

1. Banach space

مرتبه ۴ برای رابطه (۱.۳) و شکل ۴.۴ نمودار نرم‑۲ خطای روش صریح مرتبه ۴ به ازای Nهای مختلف، و همچنین جدول ۲.۴، جدول نمایش نرم‑۲ خطای روش‌های صریح و ضمنی می‌باشد.

۱.۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این پایان‌نامه طرح‌های تفاضلات متناهی صریح و ضمنی مرتبه چهارم و ششم را برای معادلات کلاین‑ گوردون غیرخطی معرفی و تحلیل کرده‌ایم. پایداری وسازگاری این طرح‌ها به صورت تئوری و عددی برای معادلات غیرخطی کلاین‑ گوردون با شرایط مرزی غیرمحلی مورد بررسی قرار گرفت. ما برای این منظور دو مثال عددی را به طور کامل تحلیل کردیم که به وضوح مرتبه همگرایی و پایداری متفاوت این طرح‌ها را می‌توان درک کرد. نشان داده شد که طرح تفاضلات متناهی را می‌توان برای طیف وسیعی از $nlKGE$های مختلف، با شرایط اولیه دیریکله معمولی، و همچنان همراه با برخی از شرایط مرزی غیرمحلی در نظر گرفت.

منابع

[1] K.M. Hoffman, R. Kunze, Linear Algebra Second Edition, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

[2] A.H. Siddig, Applied Functional Analysis, Marcel Dekker, Inc, 2004.

[3] J. Stoer and B. Roland, Introduction to Numerical Analysis. Springer Science, 2013.

[4] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, New York, 1976.

[5] D.R. Kincaid, W. C. Elliott, Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing, American Mathematical Society, 2002.

[6] Courant, R., Friedrichs, K. Lewy, H. Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. Math. Ann. 100 (1928), 32–74.

[7] A.H. Encinas, V. Gayoso-Martínez, A. Martín del Rey, J. Martín-Vaquero, A. Queiruga-Dios, *A study on the efficiency and stability of high-order numerical methods for form-II and form-III of the nonlinear Klein–Gordon equations*, Int. J. Mod. Phys. C, 27 (2016),165-197.

[8] A.H. Encinas, J. Martín-Vaquero, A. Queiruga-Dios, V. Gayoso-Martínez, *Efficient high order finite difference methods for nonlinear Klein–Gordon equations. I: Variants of the phifour model and the form-I of the nonlinear Klein–Gordon equation*, Nonlinear Anal. Model. Control, 20 (2014), 274-290.

[9] J. Martín-Vaquero, B.A. Wade, *On efficient numerical methods for an initial-boundary value problem with nonlocal boundary conditions*, Appl. Math. Modelling, 36 (2012), 3411–3418.

[10] J. Martín-Vaquero, A.H. Encinasa, A. Queiruga-Diosa, V. Gayoso-Martínezb, Á.M. del Reya, *Numerical schemes for general Klein-Gordon equations with Dirichlet and nonlocal boundary coditions* , Nonlinear Anal. Model. Control, 23 (2018), 50-62.

[11] R.H. Enns, G.C. McGuire, Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers, Birkhäuser, Boston, 2001.

[12] F.F. Ivanauskas, Yu.A. Novitski, M.P. Sapagovas, *On the stability of an explicit difference scheme for hyperbolic equations with nonlocal boundary conditions*, Differential Equation , 49 (2013), 849–856.

[13] M. Sapagovas, R. Cˇ iupaila, Ž. Jokšiene˙, T.Meškauskas, experiment for stability analysis of difference schemes with nonlocal conditions , Informatica, 24 (2013), 275–290.

[14] G.D. Smith, Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Oxford University, 1986.

[15] J.J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, 1st Edition, 1967.

[16] M. Dehghan, *On Solution of an Initial-Bundary Value Problem that Combines Neumann and Integral condition for the Wave Equation* ,Wiley InterScience. Doi, 21 (2005), 24-40.

[17] J. Martín-Vaquero, A.H. Encinasa, A. Queiruga-Diosa, *Numerical algorithms for diffusion-reaction problems with non-classical conditions*, Appl. Math. Comput, 218 (2012), 5487-5495.

[18] J.C. Strikwerda, Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations ,2nd ed., SIAM, Philadelphia, 2004.

Abstract

In this thesis, we have developed and analyzed fourth-and sixth-order stable and implicit finite difference schemes for general nonlinear Klein-Gordon equations. Stability and consistency of these schemes were studied theoretically and numerically for the case of nonlocal boundary conditions together with nonlinear Klein-Gordon equations. We have included for this purpose two numerical examples in which we clearly appreciate the different convergence rate and stability of these schemes. It was shown that they can be considered for a wide range of different nlKGE, including with typical Dirichlet, but also some nonlocal integral boundary conditions.

Keywords: *Klein-Gordon equations, consistency, stability, nonlocal boundary conditions, finite difference methods.*

University of Kurdistan
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

A Thesis Submitted to the Postgraduate Studies Office in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of M.Sc. in Applied Mathematics

Title:

Numerical schemes for general Klein–Gordon equations with Dirichlet and nonlocal boundary conditions

By:

Roya Azhdari

The above thesis was evaluated and approved by the following members of the thesis committee very good quality on June 21, 2023.

Position	Name and Title	Signature
1. Supervisor:	Dr. Amjad Alipanah	
2. External Examiner:	Dr. Shahrokh Esmaeili	Shahrokh Esmaeili
3. Internal Examiner:	Dr. Kamal Shanazari	

Head of Department:

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

Faculty Graduate Coordinator:

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی

University of Kurdistan
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

A Thesis

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of

M.Sc. in Applied Mathematics

Title:

Numerical schemes for general Klein–Gordon equations with Dirichlet and nonlocal boundary conditions

By:

Roya Azhdari

Supervisor:

Dr. Amjad Alipanah

june 21, 2023

University of Kurdistan
Faculty of Science
Department of Math

A Thesis
Submitted to the Postgraduate Studies Office in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of M.Sc. in Applied Mathematics

Title:
Numerical schemes for general Klein-Gordon equations with Dirichlet And nonlocal boundary conditions

By:
Roya Azhdari

Supervisor:
Dr. Amjad Alipanah

june, 2023